2027학년도 중등학교교사 임용후보자 선정경쟁시험

수 학

수험 번호 : ( )　　**성 명 : ( )**

제1차 시험	2교시 전공A	12문항 40점	시험 시간 90분

◦ 문제지 전체 면수가 맞는지 확인하시오.
◦ 모든 문항에는 배점이 표시되어 있습니다.

1. 좌표공간의 영역

$$\Omega = \left\{ (x, y, z) \,\middle|\, x^2 + y^2 + z^2 \le 2z,\ z \ge \sqrt{x^2 + y^2} \right\}$$

에 대하여 Ω의 부피와 삼중적분 $\iiint_{\Omega} z\, dV$의 값을 순서대로 구하시오. [2점]

2. 공정한 주사위를 한 번 던져 나온 눈의 수를 X라 하고, 공정한 동전을 X번 던져 앞면이 나온 횟수를 Y라 하자. 조건부기댓값 $E(X \mid Y = 1)$과 공분산 $\mathrm{Cov}(X, Y)$의 값을 순서대로 구하시오. [2점]

3. 덧셈군

$$G = \mathbb{Z}_{12} \times \mathbb{Z}_{20} \times \mathbb{Z}_{30}$$

은 $d_1 \mid d_2$, $d_2 \mid d_3$을 만족시키는 자연수 d_1, d_2, d_3에 대하여 $\mathbb{Z}_{d_1} \times \mathbb{Z}_{d_2} \times \mathbb{Z}_{d_3}$과 동형이다. 순서쌍 (d_1, d_2, d_3)과 G의 부분군 중에서 위수가 6인 순환군의 개수를 순서대로 구하시오. (단, $d_1 \geq 2$이고, $\mathbb{Z}_m$은 덧셈 순환군이다.) [2점]

4. 단위속력 평면곡선 $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$이

$$\alpha(0) = (0,0), \quad \alpha'(0) = (1,0), \quad \kappa(s) = \frac{1}{1+s^2}$$

를 만족시킨다. 점 $\alpha\left(\frac{3}{4}\right)$의 좌표와 $s = \frac{3}{4}$에서 곡선 α의 접촉원(osculating circle)의 중심의 좌표를 순서대로 구하시오. (단, κ는 α의 부호곡률(signed curvature)로 $T'(s) = \kappa(s)N(s)$를 만족시키고, $T(s) = \alpha'(s)$이며 $N(s)$는 $T(s)$를 시계반대방향으로 $\frac{\pi}{2}$만큼 회전한 단위벡터이다.) [2점]

5. 자연수 n에 대하여 $a_n = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n^2}$이라 하자. 거듭제곱급수(멱급수, power series)

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$$

의 수렴반경(수렴반지름, radius of convergence) R을 풀이 과정과 함께 쓰시오. 또한 이 거듭제곱급수가 수렴하는 실수 x의 값의 범위를 풀이 과정과 함께 쓰고, 이 거듭제곱급수가 열린구간 $(-R, R)$에서 고른수렴(평등수렴, 균등수렴, uniform convergence)하는지 판별하고 그 이유를 쓰시오. [4점]

6. 다항식 $p(z) = z^5 + 7z^2 + 1$에 대하여 방정식 $p(z) = 0$이 영역 $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$과 $\{z \in \mathbb{C} \mid 1 < |z| < 2\}$에서 갖는 근의 개수를 각각 풀이 과정과 함께 쓰시오. 또한 복소평면에서 중심이 원점이고 반지름의 길이가 2인 원을 시계반대방향으로 한 바퀴 도는 곡선을 C라 할 때, 적분

$$\oint_C \frac{z^3 p'(z)}{p(z)}\, dz$$

의 값을 풀이 과정과 함께 쓰시오. (단, 근의 개수는 중복도를 포함하여 센다.)

※ 다음 정리는 필요하면 증명 없이 사용할 수 있다.

(루셰 정리) 두 함수 f, g가 단순닫힌곡선 Γ와 그 내부를 포함하는 열린집합에서 해석적이고 Γ 위의 모든 점 z에서 $|g(z)| < |f(z)|$이면, Γ의 내부에서 f와 $f + g$의 영점의 개수(중복도 포함)는 같다. [4점]

7. 2×2 실행렬 전체의 벡터공간 $M_2(\mathbb{R})$와 실수 c에 대하여 $B=\begin{pmatrix}0 & 1\\ c & 0\end{pmatrix}$이라 하고, 선형변환 $T: M_2(\mathbb{R})\to M_2(\mathbb{R})$를

$$T(X)=X^{T}+\mathrm{tr}(X)\,B$$

로 정의하자. 순서기저 $\beta=\{E_{11},E_{12},E_{21},E_{22}\}$에 대한 행렬 $[T]_{\beta}$와 T의 고윳값을 각각 풀이 과정과 함께 쓰시오. 또한 T가 대각화가능하도록 하는 c의 값을 구하고, 그 c에 대하여 $[T]_{\gamma}$가 대각행렬이 되는 $M_2(\mathbb{R})$의 순서기저 γ를 하나 풀이 과정과 함께 쓰시오. (단, X^{T}는 X의 전치행렬, $\mathrm{tr}(X)$는 X의 대각합이고, E_{ij}는 (i,j) 성분만 1이고 나머지 성분은 0인 행렬이다.) [4점]

8. 체 K를 유리수체 $\mathbb{Q}$ 위에서 다항식 $x^{6}-5$의 분해체라 하자. $[K:\mathbb{Q}]$의 값을 구하고, 갈루아군 $G(K/\mathbb{Q})$와 동형인 군을 풀이 과정과 함께 쓰시오. 또한 $[E:\mathbb{Q}]=2$인 K의 부분체 E를 모두 풀이 과정과 함께 쓰시오. 그리고 $\gamma=\sqrt[6]{5}\,\sqrt{3}\,i$에 대하여 최소다항식 $\mathrm{irr}(\gamma,\mathbb{Q})$를 구하고, $\mathbb{Q}(\gamma)$가 $\mathbb{Q}$ 위의 갈루아확대체인지 판별하고 그 이유를 쓰시오. (단, $\sqrt[6]{5}$는 양의 실수이고 $i=\sqrt{-1}$이다.) [4점]

9. 실수 p에 대하여 이상적분

$$I(p) = \int_0^{\infty} \frac{\arctan x}{x^p}\, dx$$

를 생각하자. $I(p)$가 수렴하도록 하는 실수 p의 값의 범위를 풀이 과정과 함께 쓰시오. 또한 $I\left(\frac{3}{2}\right)$의 값을 풀이 과정과 함께 쓰시오. (단, $\arctan x$는 함수 $\tan x$ $\left(-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}\right)$의 역함수이다.) [4점]

10. 실수 전체의 집합 $\mathbb{R}$ 위의 위상

$$\mathcal{T} = \{(a, \infty) \mid a \in \mathbb{R}\} \cup \{\varnothing, \mathbb{R}\}$$

에 대하여, 위상공간 $(\mathbb{R}, \mathcal{T})$에서 집합 $[0, 1)$의 폐포를 풀이 과정과 함께 쓰시오. 또한 $\mathbb{R}$의 공집합이 아닌 부분집합 S에 대하여 부분공간 S가 컴팩트(compact)일 필요충분조건은 S가 최솟값을 갖는 것임을 증명하시오. 그리고 이를 이용하여 집합 $\{x \in \mathbb{R} \mid x^3 - 3x \geq 0\}$이 $(\mathbb{R}, \mathcal{T})$의 컴팩트 부분공간인지 판별하시오. [4점]

11. 두 확률변수 X, Y는 서로 독립이고, 각각의 확률밀도함수가

$$f_X(x)=\begin{cases} xe^{-x}, & x>0, \\ 0, & \text{그 밖}, \end{cases} \qquad f_Y(y)=\begin{cases} e^{-y}, & y>0, \\ 0, & \text{그 밖} \end{cases}$$

이다. 두 확률변수 $U=\dfrac{X}{X+Y}$, $V=X+Y$의 결합확률밀도함수 $g(u,v)$를 풀이 과정과 함께 쓰시오. 또한 U와 V가 서로 독립인지 판별하고 그 이유를 쓰시오. 그리고 U의 확률밀도함수를 이용하여 $P(X>3Y)$의 값을 풀이 과정과 함께 쓰시오. [4점]

12. 수열 $\{a_n\}$이

$$a_0=1, \qquad a_1=1, \qquad a_{n+1}=a_n+2na_{n-1} \quad (n\geq 1)$$

을 만족시킨다. 수열 $\{a_n\}$의 지수생성함수(exponential generating function) $E(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n\dfrac{x^n}{n!}$가 만족시키는 미분방정식을 세워 $E(x)$를 풀이 과정과 함께 쓰시오. 또한 a_n을 합의 기호 $\sum$를 사용하여 나타내고, a_6의 값을 풀이 과정과 함께 쓰시오. [4점]

<수고하셨습니다.>