2027학년도 중등학교교사 임용후보자 선정경쟁시험

수 학

수험 번호 : ( )　　**성 명 : ( )**

제1차 시험	2교시 전공A	12문항 40점	시험 시간 90분

◦ 문제지 전체 면수가 맞는지 확인하시오.
◦ 모든 문항에는 배점이 표시되어 있습니다.

1. 극좌표로 $r = 2 + \cos\theta \ \ (0 \le \theta \le 2\pi)$로 나타낸 곡선으로 둘러싸인 영역을 D라 하고, D의 경계를 시계반대방향으로 한 바퀴 도는 곡선을 C라 하자. 두 함수

$$P(x,y) = \frac{x-3y}{x^2+y^2} - y - xy^2, \qquad Q(x,y) = \frac{3x+y}{x^2+y^2} + x$$

에 대하여 D의 넓이와 선적분 $\oint_C P\,dx + Q\,dy$의 값을 순서대로 구하시오. [2점]

2. 확률밀도함수가

$$f(x) = \begin{cases} 2x, & 0 < x < 1, \\ 0, & \text{그 외} \end{cases}$$

인 모집단에서 크기가 n인 확률표본 $X_1, X_2, \ldots, X_n$을 뽑는다. $Y = \max\{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$이라 할 때 $E(Y) = \dfrac{20}{21}$이다. n의 값과 $E\left(\overline{X}^2\right)$의 값을 순서대로 구하시오. (단, $\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$이다.) [2점]

3. 복소평면에서 중심이 원점이고 반지름의 길이가 2인 원을 시계반대방향으로 한 바퀴 도는 곡선을 C라 하자. 두 적분

$$\oint_C \frac{\overline{z}\,e^z}{z-1}\,dz, \qquad \oint_C \frac{\overline{z}\,e^z}{z-1}\,|dz|$$

의 값을 순서대로 구하시오. (단, $\overline{z}$는 z의 켤레복소수이고, $|dz|$는 호의 길이 요소이다.) [2점]

4. 좌표평면 $\mathbb{R}^2$의 두 점 $P=(x_1,y_1)$, $Q=(x_2,y_2)$에 대하여

$$e(P,Q)=\begin{cases} |y_1-y_2|, & x_1=x_2, \\ |y_1|+|x_1-x_2|+|y_2|, & x_1\neq x_2 \end{cases}$$

로 정의하면 e는 $\mathbb{R}^2$ 위의 거리함수이다. 거리공간 $(\mathbb{R}^2,e)$에서 점 $(2,3)$과 집합 $A=\{(x,y)\mid x^2+y^2\le 1\}$ 사이의 거리 $\inf\{e((2,3),Q)\mid Q\in A\}$의 값을 구하시오. 또한 열린 공 $B=\{P\in\mathbb{R}^2\mid e(P,(2,3))<6\}$에 속하는 점 중에서 두 좌표가 모두 정수인 점의 개수를 구하시오. [2점]

5. 실수열 $\{a_n\}$을

$$a_1 = 1, \qquad a_{n+1} = \sqrt{6 - a_n} \quad (n \geq 1)$$

로 정의하자. 모든 자연수 n에 대하여 $1 \leq a_n \leq 3$이고

$$|a_{n+2} - a_{n+1}| \leq \frac{1}{2\sqrt{3}} |a_{n+1} - a_n|$$

임을 보이시오. 또한 수열 $\{a_n\}$이 코시수열(Cauchy sequence)임을 보이고, $\lim_{n\to\infty} a_n$의 값을 풀이 과정과 함께 쓰시오. [4점]

6. 정함수(전해석함수, entire function) f가 모든 복소수 z에 대하여

$$|f(z)| \leq |z^2 - 1|\, e^{\mathrm{Re}\, z}$$

를 만족시키고 $f'(0) = i$이다. $f(z)$를 풀이 과정과 함께 쓰시오. 또한 중심이 원점이고 반지름의 길이가 2인 원을 시계반대방향으로 한 바퀴 도는 곡선 C에 대하여 적분 $\oint_C \frac{1}{f(z)}\, dz$의 값을 풀이 과정과 함께 쓰시오. (단, $\mathrm{Re}\, z$는 z의 실수부분이다.) [4점]

7. 모든 성분이 실수인 3×3 행렬 A가 다음 조건을 만족시킨다.

<조 건>

(가) 행렬 $A^2 - A - 2I$의 계수(rank)는 1이다.

(나) $\mathrm{tr}(A) = 1$이고 $\det A < 0$이다.

A의 모든 고윳값과 A의 최소다항식을 각각 풀이 과정과 함께 쓰시오. 또한 $A^5 = pA + qI$를 만족시키는 실수 p, q의 값을 구하시오. (단, I는 3×3 단위행렬이고, $\mathrm{tr}(A)$는 A의 대각합이다.) [4점]

8. 체 K를 유리수체 $\mathbb{Q}$ 위에서 다항식 $(x^4 - 4x^2 + 2)(x^2 + 1)$의 분해체라 하자. $[K : \mathbb{Q}]$의 값과 갈루아군 $G(K/\mathbb{Q})$와 동형인 군을 풀이 과정과 함께 쓰시오. 또한 $\mathbb{Q} \leq E \leq K$를 만족시키는 체 E의 개수와, 그중 $[E : \mathbb{Q}] = 4$이고 E가 $\mathbb{Q}$ 위의 갈루아확대체이며 $G(E/\mathbb{Q})$가 순환군인 E의 개수를 풀이 과정과 함께 쓰시오. [4점]

9. 자연수 n에 대하여 함수 $f_n : [0,\infty) \to \mathbb{R}$를

$$f_n(x) = \frac{x}{n^2}\, e^{-x/n} + \frac{nx}{n+x}\, e^{-x}$$

이라 하자. 함수열 $\{f_n\}$이 $[0,\infty)$에서 점별수렴하는 극한함수 f를 구하고, $\{f_n\}$이 $[0,\infty)$에서 f로 고른수렴(평등수렴, 균등수렴, uniform convergence)함을 보이시오. 또한 $\lim_{n\to\infty} \int_0^\infty f_n(x)\, dx$의 값을 풀이 과정과 함께 쓰고, 이 값이 $\int_0^\infty f(x)\, dx$와 같은지 판별하시오. [4점]

10. 2×2 실행렬 전체의 집합 $M_2(\mathbb{R})$를 $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \leftrightarrow (a,b,c,d)$로 $\mathbb{R}^4$와 동일시하고 보통위상을 준다. 부분공간

$$X = \{A \in M_2(\mathbb{R}) \mid A^2 = I\}$$

가 컴팩트(compact)가 아님을 보이시오. 또한 X에서 정의된 함수 $f(A) = \operatorname{tr} A$의 치역을 구하고, 이를 이용하여 X의 연결성분(connected component)의 개수를 풀이 과정과 함께 쓰시오. (단, I는 2×2 단위행렬이고 $\operatorname{tr} A$는 A의 대각합이다.) [4점]

11. 덧셈군 $G = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$의 부분군 H를

$$H = \langle (6,4),\ (2,10) \rangle$$

라 하자. 상군(몫군, quotient group) G/H와 동형인 군을 $\mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_n$ $(m \mid n)$ 꼴로 풀이 과정과 함께 쓰시오. 또한 G/H에서 원소 $(1,0)+H$의 위수와, G/H에서 위수가 26인 원소의 개수를 각각 풀이 과정과 함께 쓰시오. (단, m, n은 2 이상의 자연수이고, $\mathbb{Z}_m$은 덧셈 순환군이다.) [4점]

12. 2×2 실행렬 전체의 벡터공간 $M_2(\mathbb{R})$와 행렬 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$에 대하여, 실수 k마다 선형변환 $T_k : M_2(\mathbb{R}) \to M_2(\mathbb{R})$를

$$T_k(X) = AX - XA + kX$$

로 정의하자. T_k가 가역(invertible)이 아니도록 하는 실수 k의 값을 모두 풀이 과정과 함께 쓰시오. 또한 이러한 k 중에서 T_k의 랭크(rank)가 가장 작은 k에 대하여 T_k의 상(image) $\mathrm{Im}\, T_k$의 기저를 풀이 과정과 함께 쓰시오. [4점]

<수고하셨습니다.>